Ing.Carlos Fernando Ortega

T.P.25255239726 CND – COPNIA

Todos los derechos reservados

Guía N° 4 – Derivadas – Cuarto Periodo

Nombre del estudiante:

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de Evaluación
Objetivo de la Guía: Conocer el desarrollo de las derivadas de diferentes funciones y su graficación.	Utiliza e interpreta la derivada para resolver problemas relacionados con la variación y la razón de cambio de funciones que involucran magnitudes como velocidad, aceleración, longitud, tiempo

Grado 11 - Cálculo

Periodo 3

DBA 7. Usa propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intra escolares y extraescolares

ESTÁNDAR BÁSICO DE COMPETENCIA: Modela situaciones de variación con funciones polinómicas.

INDICADOR DE DESEMPEÑO: Interpretar el concepto de límite de una función gráficamente y determinar su valor utilizando las diferentes funciones de variable real.

TEMAS:
1. Limites - 2. Definición formal de limite - 3. Limites laterales - 4. Limites racionales -
5. Límites de funciones indeterminadas - 6. Límites de funciones trigonométricas
7. Continuidad / Funciones continuas / Continuidad de una función en un punto
8. Discontinuidad

Secuencia numérica: Una secuencia o sucesión numérica es una lista de números. El orden importa:
Por ejemplo: la secuencia 1, 2, 3 es distinta de la secuencia 2, 3, 1. Una secuencia es infinita si nunca termina.

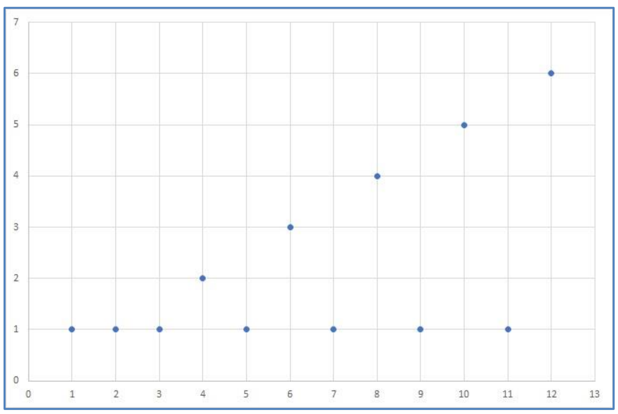
fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

Por ejemplo: la secuencia de los números pares positivos, en orden, es infinita: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... Podemos describir una secuencia usando una expresión general para su n-ésimo término.

Por ejemplo: si decimos que **a(n) = 3n+1**, y comenzamos en **n = 1**, entonces estamos hablando de esta secuencia: 4, 7, 10, 13, 16. Esta es una ***secuencia aritmética***, en donde la diferencia entre un término y el anterior es constante.
También podemos representar una secuencia gráficamente como una función: el eje horizontal se usa para n = 1, 2, 3,... y el eje vertical para los valores a(n) de la secuencia.

Por ejemplo: la secuencia infinita 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, … se representa gráficamente como se ve en la gráfica de abajo. Y en fórmulas, se describe así:
a(n) = 1, si n es impar
a(n) = n/2, si n es par.
Si los numeros son n=1,2,3,4,5,... la secuencia quedaría de la siguiente manera:
a(n) = 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5,......... y su gráfica quedaría:



Una secuencia (a(n)) es creciente si se tiene que cada término es mayor o igual que el anterior. Es decir, para n ≥ 1, a(n+1) ≥ a(n).

Ejercicio 1:
1. Dibuja en el plano cada secuencia infinita:
a) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, …
b) 5, 5,2 , 5,22 , 5,222 , 5,222, …
c) La secuencia b dada por b(n) = (−1) n .
2. Encuentra una fórmula (o varias, por casos) para cada secuencia:
a) −1, 4, 11, 20, 31, 40, 59, 76, 95, …
b) 1, 6, −1, 7, −1, 8, 1, 9, −1, 10, 1, 11, ...

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

1. LÍMITES

El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones.
A veces algo no se puede calcular directamente... ¡pero puedes saber cuál debe ser el resultado si te vas acercando más y más! A esto lo llamamos el límite de una función.

EJEMPLO 1:

¿cuál es el valor de $\frac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x=1$?

∴ Vamos a reemplazar "x" por "1"

Entonces tenemos:

$$\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Indeterminado!

Una técnica para encontrar el verdadero valor de este ejemplo es acercándose al 1 por "valores cercanos": Lo veremos en la siguiente tabla:

"x"	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
0,99999	1,99999

* Es decir cada vez que la "x" se acerque más y más al 1, el resultado final de la operación se acercará más al 2.

A esto nos referimos cuando hablamos de ***límite***. Y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Se lee:
El límite cuando "x" tiende a "a" de f(x)

Para el ejemplo que estamos haciendo, la forma matemática de denotarlo sería:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

Y el resultado de éste límite es 2

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Todos los derechos reservados

Vimos la forma tabular de calcular un límite, pero la manera más común de hacerlo es de forma ***algebraica***. Y sería la siguiente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \quad \text{/ Aplicando suma por su diferencia y simplificando por } (x-1)$$

$$= \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2 \quad \text{/ Evaluando el límite en } x=1$$

En la mayoría de las ocasiones para obtener el resultado de un límite, basta sólo con reemplazar la **"X"** al valor a cual tiende. Tal como en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2:

$$\lim_{x\to 3} x^2-2x+8$$

$$= 3^2-2\cdot 3+8 \quad \text{/ evaluando en } x=3$$

$$= 9-6+8 = 11$$

$\therefore$ El límite pedido es 11

Pero hay otras veces como en el primer ejemplo, donde al evaluar el límite este se indefine, por lo que en estas ocasiones se debe realizar un procedimiento algebraico (factorizar, simplificar, racionalizar, etc.). Para luego evaluar y encontrar el valor del límite.

EJEMPLO 3:

Al evaluar nos queda:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado

En este caso lo más apropiado es racionalizar:

Todos los derechos reservados

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

Para entender un poco más el concepto de límite te invito a observar los siguientes videos:
https://www.youtube.com/watch?v=nqnxxmnK5Lk&t=1s

Ejercicio 2:
Desarrolla los siguientes problemas:

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4x-8}$

2) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$

4) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10}$

5) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x+6}{x^2-1}$

6) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x+4}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

LÍMITE LATERAL

El concepto de **límite lateral** es el mismo que el de límite, pero considerando que **x** se aproxima al punto **a** por su derecha o por su izquierda.

EJEMPLO 1:
Consideremos la función **f(x)=1/x** y que queremos calcular su límite en 0, es decir,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Cuando **x** toma valores cercanos a 0 por su derecha, **f(x)** toma valores positivos grandes:

$f(0.1) = 10$

$f(0.01) = 100$

$f(0.001) = 1000$

$f(0.0001) = 10000$

Deducimos que el límite de **f(x)** cuando x tiende a 0 **por la derecha** es infinito positivo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Sin embargo, si **x** se aproxima por la izquierda de 0, **f(x)** toma valores muy pequeños:

$f(-0.1) = -10$

$f(-0.01) = -100$

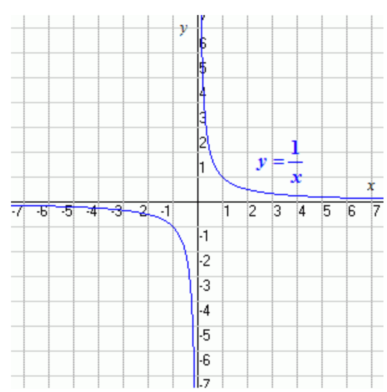
$f(-0.001) = -1000$

$f(-0.0001) = -10000$

Por tanto, el límite de **f(x)** cuando **x** tiende a 0 **por la izquierda** es infinito negativo:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Has un recorrido de los puntos de la función **1/x** en el siguiente enlace:
https://www.geogebra.org/m/SbsYCGxU

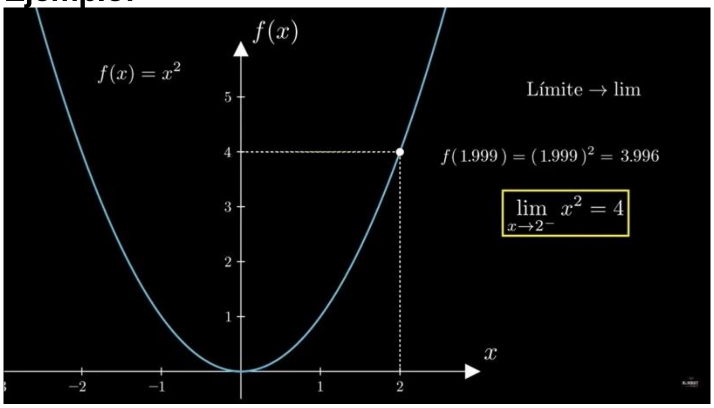


fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

Nota: cuando buscas el límite por la derecha le colocas un **+** y si es por la izquierda un **-**

Ejemplo:



EJEMPLO 2:
En las funciones racionales (fracciones de polinomios), los puntos que anulan al denominador son puntos donde, generalmente, los límites laterales no coinciden. Veamos lo siguiente:

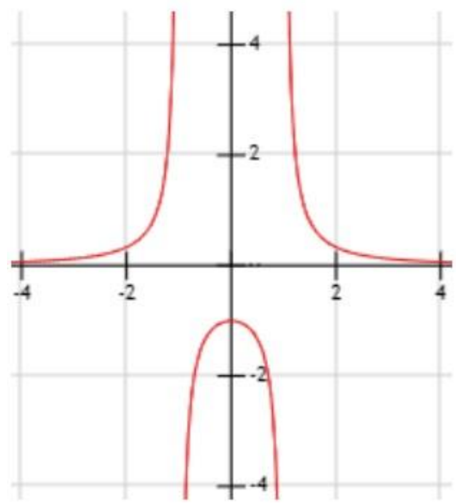
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

Gráfica:



EJEMPLO 3:
En las funciones definidas a trozos, es habitual que no coincidan los límites laterales en los puntos donde cambia la definición.
Por ejemplo, sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

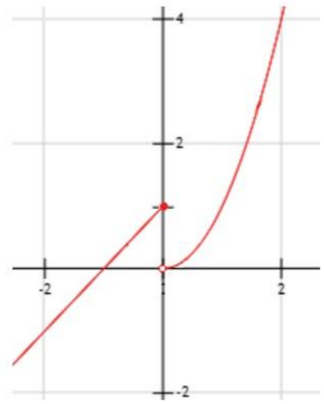
Los límites laterales en 0 son

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Todos los derechos reservados

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} x + 1 = 1$$

Su gráfica es la siguiente:



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

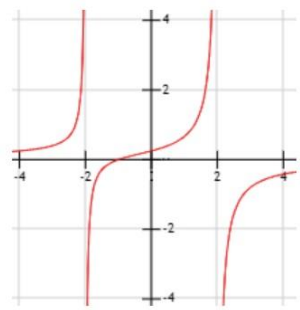
Ejercicio 3:

1. Calcular los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{4-x^2}$$

Gráfica:

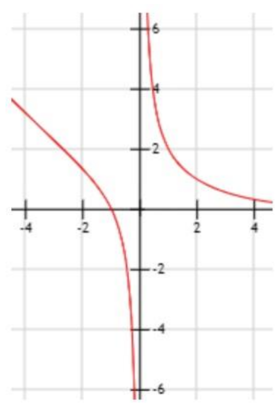


2. Calcular los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{2^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{2^x-1}$$

Gráfica:



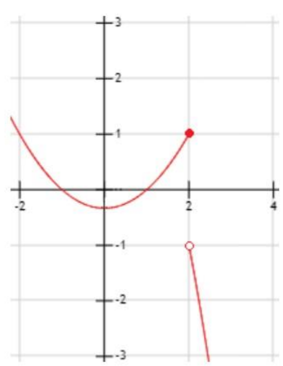
3. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{3}, & x \le 2 \\ 3 - x^2, & x > 2 \end{cases}$$

Gráfica:



Todos los derechos reservados

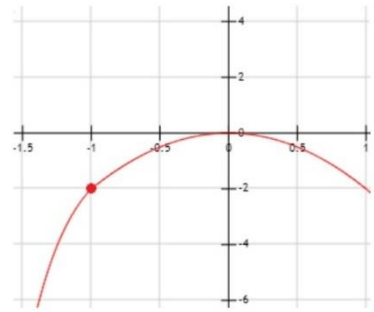
4. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 1, & x < -1 \\ -2x^2, & x \geq -1 \end{cases}$$

Gráfica:



LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES

Una función racional es una función del tipo:

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

En el estudio de los límites de funciones racionales, debemos tener cuidado con las indeterminaciones que se nos presenten y tener conocimiento de álgebra, como por ejemplo, la factorización, potenciación, entre otras.

No existe una regla para resolver un límite, sin embargo, lo primero que haremos al enfrentar un problema será evaluarlo, luego buscar la forma de simplificarlo y volverlo a evaluar con el fin de obtener su valor final. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1:
Calcular el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$$

Primero lo evaluamos:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{5^2 - 2(5) - 15}{5 - 5}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Factorizamos el numerador de la expresión:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x-5} \Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+3)}{\cancel{x-5}} = \lim_{x \to 5} x + 3$$

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Todos los derechos reservados

Simplificada la expresión volvemos a evaluar el límite:

$$\lim_{x \to 5} x + 3 = 5 + 3 = 8$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = 8$$

EJEMPLO 2: Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Primero lo evaluamos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1^3 - 1}{1 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Luego factorizamos el numerador de la expresión:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1$$

Como hemos simplificado la expresión, evaluamos el límite:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Todos los derechos reservados

EJEMPLO 3: Calcular el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1}$$

Primero lo evaluamos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1}=\frac{\frac{3}{1+1}-\frac{3}{2}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1}=\frac{0}{0}=indeterminado$$

Restamos el numerador de la expresión:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{6-3x-3}{2x+2}}{x-1}$$

Dividimos las dos fracciones con la ley de la oreja:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3-3x}{2x+2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3-3x}{2x+2}}{\frac{x-1}{1}}=\lim_{x\to 1}\frac{3-3x}{(2x+2)(x-1)}$$

Sacamos factor común 3 del numerador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3-3x}{(2x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(1-x)}{(2x+2)(x-1)}$$

Sacamos factor común del signo en el numerador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(1-x)}{(2x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x-1)}{(2x+2)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3\cancel{(x-1)}}{(2x+2)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{-3}{2x+2}$$

Volvemos a evaluar el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3}{2x+2}=-\frac{3}{2(1)+2}=-\frac{3}{4}$$

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Todos los derechos reservados

EJERCICIO 4: Desarrollar los siguientes límites en el cuaderno y presentarlo al docente:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + 4} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

LÍMITES DE FUNCIONES INDETERMINADAS

En algunas ocasiones se presenta el cálculo de límites de cocientes, diferencias y productos de funciones en los que al reemplazar la variable por el valor al cual tiende se generan indeterminaciones del tipo:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty$$

entre otras. El resultado de estos límites no puede anticiparse y el mismo puede ser 0, ∞ ó un número finito diferente de cero, o bien puede no existir. Para resolverlos, se realizan procedimientos algebraicos adecuados que permitan salvar la indeterminación.

Antes de iniciar con las indeterminaciones hay que analizar algunos cocientes que no lo son como:

Si K=1 y a medida que el denominador se parece más a cero, la relación aumenta. tendremos:

$$\frac{k}{o} = \infty$$

X ->0	
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000

Caso contrario ocurre a continuación, a medida que aumenta el denominador la relación tiende a cero.

$x \to \infty$	
10	0,1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001
100000	0.00001

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

Todos los derechos reservados

En un ejemplo práctico mientras más personas comparten una misma pizza menos comen cada una.

Este tipo de relaciones no son indeterminadas mientras que **0/0** e ∞/∞ si lo son, estas no se los puede determinar el valor porque en el caso de infinito son números grandes pero no se puede establecer cuanto

1.- Límites indeterminados 0/0

A.- Factorización

1.- Cuando el límite indeterminado es 0/0 y la tendencia es a cero, se realiza un factor común, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Sea el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=$$

1,. Se debe evaluar el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=\frac{(2+0)^2-4}{0}=\frac{4-4}{0}=\frac{0}{0}\ \therefore\ indeterminado$$

Se sustituye la variable por el valor de la tendencia

2.- Trata de eliminar la indeterminación

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+2(2)x+x^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+4x+x^2-4}{x}$$

Se resuelve el producto notable

Se simplifica

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x+x^2}{x}\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{x(4+x)}{x}=\lim_{x\to 0}4+x=4+0=4$$

Factor común

Se vuelve a evaluar

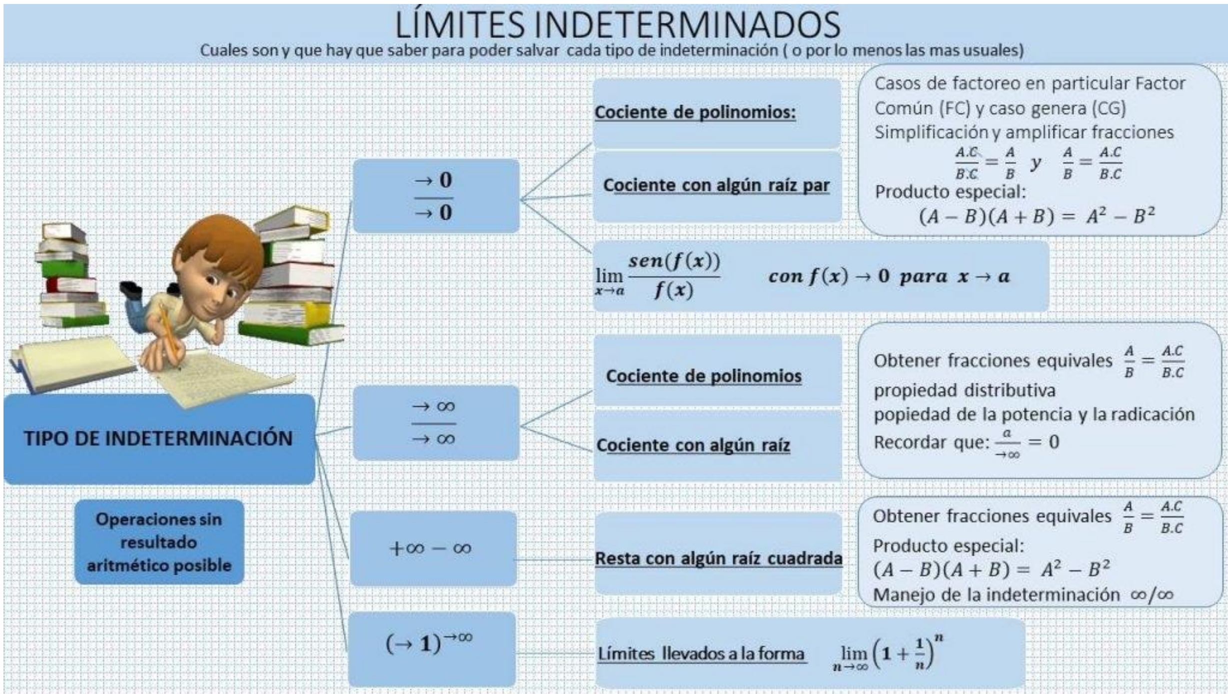
Respuesta

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=4$$

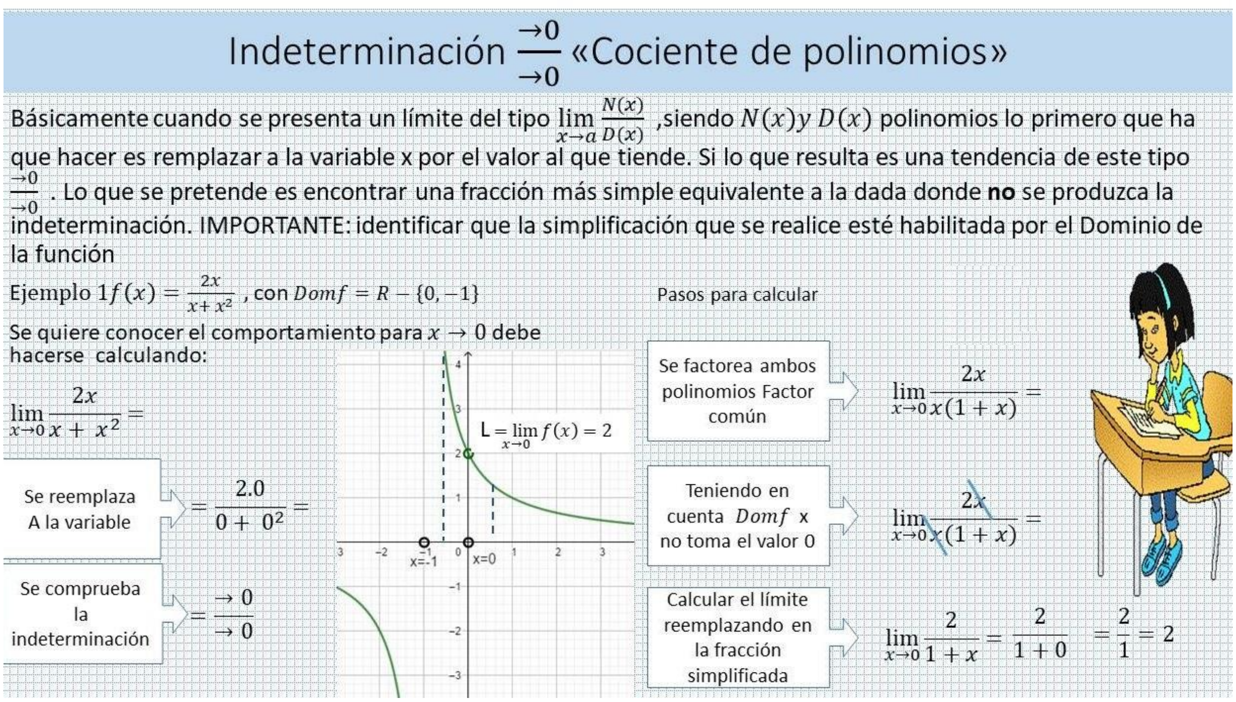
fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

QUE HAY QUE SABER PARA RESOLVER LÍMITES INDETERMINADOS



1. INDETERMINACIÓN: CERO/CERO



fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing.Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA
Todos los derechos reservados

Indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ «Cociente de polinomios»

En un límite del tipo $\lim_{x\to a}\frac{N(x)}{D(x)}$,siendo $N(x) y\, D(x)$ polinomios, con una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$,

Se reconoce que el valor al que tiende la variable x $(x \to a)$ anular el polinomio por eso es una **«raíz o cero»**

Como consecuencia si $x = a$ es **«cero o Raíz»** de los polinomios, estos son divisibles por el binomio de la forma $x - a$

Si se calcula el cociente se puede transformar al numerador y al denominador en forma de producto, factorear.

Ejemplo 2 $f(x) = \frac{-x^2-2x+3}{x^2-4x+3}$, con $Domf = R - \{1, 3\}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-2x+3}{x^2-4x+3} =$$

Se reemplaza A la variable

$$= \frac{-1^2-2.1+3}{1^2-4.1+3} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Se comprueba la indeterminación

Para simplificar hay que factorear los polinomios .
Aplicamos caso general de factoreo, razonando así:
$x = 1$ es cero de los polimomios $\quad$ $x - 1$ es el divisor

$(-x^2-2x+3):(x-1)$

	-1	-2	3
1		-1	-3
	-1	-3	0

Cociente $\quad -x - 3$

$(x^2-4x+3):(x-1)$

	1	-4	3
1		1	-3
	1	-3	0

Cociente $\quad x - 3$

Pasos para calcular

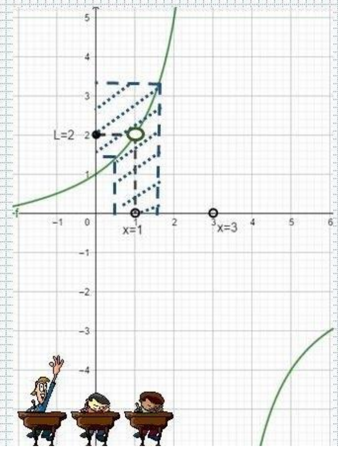
$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-2x+3}{x^2-4x+3} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-x-3)}{(x-1)(x+3)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(-x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(-x-3)}{(x+3)} = \frac{-1-3}{1+3}$$

$$= \frac{-4}{-2} = 2$$



Indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ «Cociente con alguna raíz cuadrada»

Ejemplo **3** $\quad f(x) = \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$, con $Domf = (0, \infty) - \{1\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = \frac{0^2-0}{\sqrt{0}-0} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Se reemplaza la variable
Se comprueba la indeterminación

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{\boxed{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}} =$$

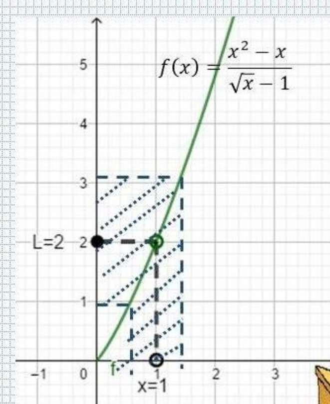
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x}-1)}{\boxed{(\sqrt{x})^2 - 1^2}} =$$

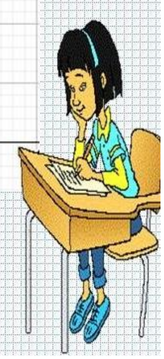
$$\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{x}+1)}{1} = \frac{1.2}{1} = 2$$

Para tener una **fracción equivalente** simplificada :

- Multiplicamos numerador y denominador por la misma expresión para **Racionalizar** la expresión irracional, hay que tener en cuenta que: $\boxed{(A-B)(A+B) = A^2 - B^2}$
- Ahora se podrá **simplificar la potencia con la raíz**
- Los polinomios presentes en la expresión resultante son simplificables
- Si es necesario se **factorea** y se **simplifica**
- Se **reemplaza** y se obtiene el valor del límite





Todos los derechos reservados

2. INDETERMINACIÓN: INFINITO /INFINITO

Indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ «Cociente de polinomios» del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}$

Cuando se presenta un límite del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}$, los pasos a seguir son:

1) Reemplazar x por el infinito y corroborar que se trata de $\frac{\to\infty}{\to\infty}$
2) Identificar la potencia de mayor exponente
3) Dividir al numerador y el denominador por dicha potencia aplicando la propiedad distributiva y cociente de potencia de igual base
4) Reemplazar nuevamente en la función simplificada Recordando que: $\frac{\to n^\circ}{\to\infty}=0$ $\quad \frac{\to\infty}{\to n^\circ}=\to\infty$ $\quad \frac{\to n^\circ}{\to 0}=\to\infty$ $\quad \frac{\to 0}{\to n^\circ}=\to 0$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^3-1}{x^2+4x}=$

La mayor potencia x^4

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^4+x^3-1):x^4}{(x^2+4x):x^4}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}-\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}}=$

Aplicando la prop. distributiva

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{3+0-0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty$

Cálculos Auxiliares

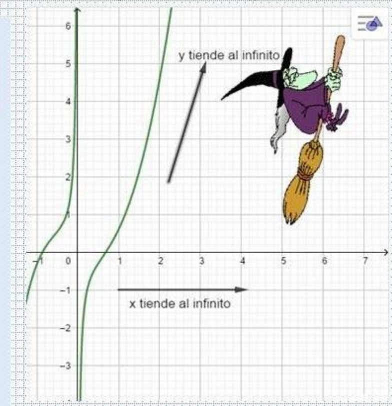
Cociente de potencias de igual base
$x^a : x^b = x^{a-b}$

$\frac{3x^4}{x^4}=3x^0=3$

$\frac{x^3}{x^4}=x^{-1}=\frac{1}{x}$

$\frac{x^2}{x^4}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$\frac{4x}{x^4}=4.x^{-3}=\frac{4}{x^3}$



RESÚMEN Indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ «Cociente de polinomios» del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}$

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+4}{x^2-5x+7}$	$b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^2+x+7}$	$c)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+4}{4x^3+3x-6}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{5x}{x^4}+\frac{7}{x^4}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{6}{x^3}}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{5x}{x^3}+\frac{7}{x^4}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{5+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}}$
$\frac{2-0+0}{0-0+0}=\frac{2}{\to 0}=\to\infty$	$\frac{0+0}{5+0+0}=\frac{0}{5}=\to 0$	$\frac{2-0+0}{4+0-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
SI GRADO DEL NUMERADOR ES MAYOR DA $\to\infty$	Si el grado del numerador es menor da 0	Si los grados son iguales el límite es el cociente de los coeficientes principales

Todos los derechos reservados

Indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ «Cociente irracional» del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}$

Cuando se presenta un límite del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}$, los pasos a seguir son:

1) Reemplazar x por el infinito y corroborar que se trata de $\frac{\to\infty}{\to\infty}$

2)Identificar la potencia de mayor exponente teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2}=x$ $\sqrt{x^4}=x^2$ (o sea que las potencias se pueden simplificar con las raíces)

3)Dividir al numerador y el denominador por dicha potencia aplicando la propiedad distributiva y cociente de potencia de igual base

4) Reemplazar nuevamente en la función simplificada Recordando que: $\frac{\to n^\circ}{\to\infty}=0$ $\frac{\to\infty}{\to n^\circ}=\to\infty$ $\frac{\to n^\circ}{\to 0}=\to\infty$ $\frac{\to 0}{\to n^\circ}=\to 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}+x}{4x-3}=$

La mayor potencia $\sqrt{x^2}=x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-2x}+x):x}{(4x-3):x}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}-\frac{x}{x}}{\frac{4x}{x}-\frac{3}{x}}=$

Aplicando la prop. distributiva

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}}\quad -1}{4\ -\ \frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{4-0}-1}{4-0}=\frac{2-1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$

En el numerador, el número de términos es dos , y distribuimos la división
En el primer término como tenemos una raíz cuadrada y se la divide por x la reemplazamos por $\sqrt{x^2}$ para poder calcular el cociente y efectuar la distributiva y simplificación

En el resto de los cocientes que se obtienen de la distribución se simplifica

Cálculos auxiliares

$\frac{\sqrt{4x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{4x^2-2x}{x^2}}$

$\sqrt{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x^2}}}=\sqrt{4-\frac{2}{x}}$

$\frac{x}{x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$

$\frac{4x}{x}=\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}=4$

EJERCICIO 5: Resuelve los siguientes límites indeterminados:

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x^{10}-1}$$

2. $$\lim_{y\to -2}\frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+5}{2x^3-6x+1}$$

5. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\pi-x}$$

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

De la misma manera en que se puede calcular por sustitución directa los límites de muchas funciones algebraicas, también las funciones trigonométricas fundamentales cuentan con esa propiedad, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema: Límites de funciones trigonométricas
Dado θ un número real en el dominio de una función trigonométrica dada:

Todos los derechos reservados

$$1.\ \lim_{x \to \theta} sen\ x = sen\ \theta \qquad 2.\ \lim_{x \to \theta} \cos\ x = \cos\ \theta$$
$$3.\ \lim_{x \to \theta} \tan\ x = \tan\ \theta \qquad 4.\ \lim_{x \to \theta} \cot\ x = \cot\ \theta$$
$$5.\ \lim_{x \to \theta} \sec\ x = \sec\ \theta \qquad 6.\ \lim_{x \to \theta} \csc\ x = \csc\ \theta$$

Además, dado un valor α, se cumple que:

Teorema 1
Si α es la medida de un ángulo dada en radianes, entonces podemos afirmar que:

$$\lim_{\alpha \to 0} \text{sen}\ \alpha = 0\ y\ \lim_{\alpha \to 0} \cos\ \alpha = 1$$

Es importante recordar que la medida en radianes de un ángulo se define como:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Donde **s** es la longitud del arco que subtiende el ángulo, sobre una circunferencia de radio **r**, cuyo centro coincide con el vértice del ángulo.

Teorema 2. **Dos límites trigonométricos especiales**
Nótese en estos 2 ejemplos los cuales sus límites no pueden resolverse por ninguno de los métodos hasta ahora estudiados, y que su evaluación por sustitución directa nos genera una forma indeterminada.

$$1.\ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\ x}{x} = 1 \qquad 2.\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{x} = 0$$

Ejemplo1:
Vamos a desarrollarlos uno a uno con los siguientes ejemplos:

$$1.\ \lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{x}$$

Solución:
En este caso el ángulo de la función trigonométrica es **3x**, por lo que para poder aplicar el teorema correspondiente necesitamos que también en el denominador el valor del argumento sea **3x**. Para poder satisfacer este requerimiento multiplicamos por 3 tanto en el numerador como en el denominador.

Todos los derechos reservados

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{sen\ 3x}{3x}$$
$$= 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{3x}$$
$$= 3\cdot 1$$
$$= 3$$

Ejemplo 2:

Desarrollar los límites de las siguientes funciones:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sen\,(x-2)}{(3x-6)}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sen\,(x-2)}{(3x-6)} = \lim_{x\to 2}\frac{sen\,(x-2)}{3(x-2)}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{sen\,(x-2)}{(x-2)}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1$$
$$= \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{x}$$

Solución:

La sustitución directa nos produce una forma indeterminada 0/0. Para ello utilizamos identidades trigonométricas para obtener una expresión equivalente tal como:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos\ x}\right)$$
$$= (1)\,(1)$$
$$= 1$$

Todos los derechos reservados

EJERCICIO 5: Resuelve los siguientes límites de funciones trigonométricas:

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - sen\ x}{x^3}$$

3. $$\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{sen\ x - \cos x}$$

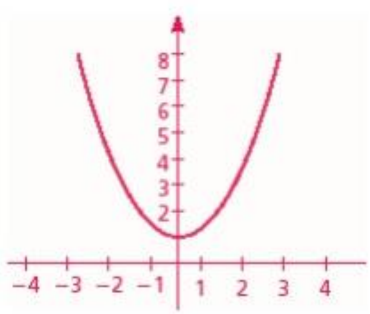
2. $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen^2 \frac{x}{3}}{x^2} \right)$$

4. $$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$$

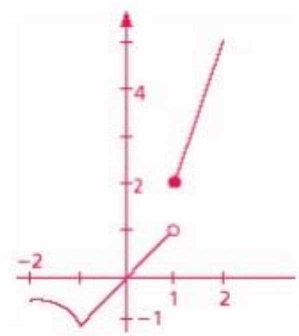
FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

Intuitivamente, es fácil captar el concepto de continuidad. En términos sencillos, puede decirse que una función es continua en un intervalo cuando se puede dibujar sobre el papel a lo largo de dicho intervalo sin levantar el lápiz. Por otra parte, se considera que la función es continua en un intervalo (a, b) cuando es continua en todo punto x, tal que $a < x < b$.

Ejemplo 1:



Función continua.



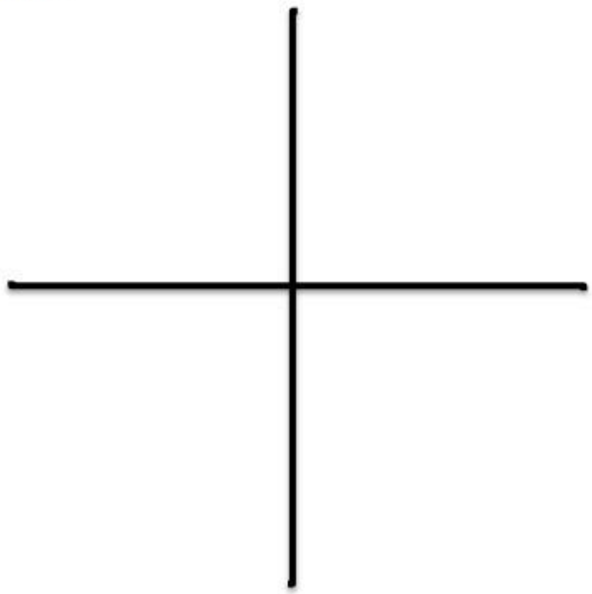
Función discontinua.

Videos de apoyo:
Continuidad de una función: https://www.youtube.com/watch?v=ZEAPl6VN4JU
Discontinuidad: https://www.youtube.com/watch?v=pJ40TwrAZ9k

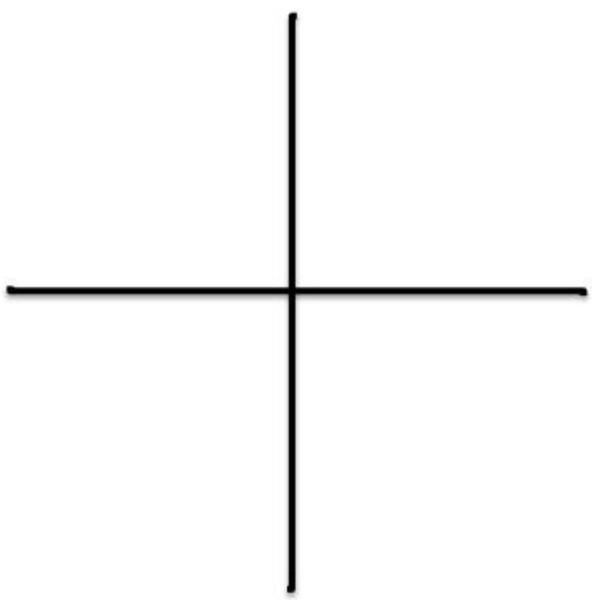
Ejercicio 6:
Dibujar dos ejemplos de continuidad de funciones, uno de continuidad y otro de discontinuidad.

Todos los derechos reservados

Continua:



Discontinua:



HETEROEVALUACIÓN: La valoración del trabajo desarrollado en la presente guía se realizará de la siguiente forma:

• **Saber Hacer (50%):** a. Elaboración y entrega de las actividades propuestas.
b. Ejercicios de Prueba.
• **Saber (25%):** a. Prueba Bimestral
• **Ser - Convivir (25%):** a. Normas de Convivencia.

Todos los derechos reservados

b. Responsabilidad y Cumplimiento en la entrega de trabajos.
c. Seguimiento a las instrucciones dadas por el docente.
d. Autoevaluación y Coevaluación.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACION: Onceava Semana del Periodo
Transcribir a hojas de block cuadriculado las siguientes tablas, marcar con una X en la casilla de la valoración correspondiente a los siguientes criterios y luego totalizar cada columna. Se debe realizar con la máxima sinceridad:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSe8K6emBxx7juVipbyPzTOGq_10Rg7a2XDDfxaaipio4DKZTA/viewform?usp=pp_url