Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Guía N° 4 – Vectores– Cuarto Periodo

Nombre del estudiante:

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de Evaluación
Objetivo de la Guía: • Explicar la diferencia entre el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores. • Determinar el producto escalar de dos vectores. • Determinar el producto vectorial de dos vectores. • Describir cómo se utilizan los productos de vectores en física. .	Realiza operaciones con vectores aplicándolo a la vida diaria.

Grado 9 - Geometría
Cuarto Periodo

DBA 7. Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.

ESTÁNDAR BÁSICO:
Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

TEMAS: ***Vectores y Aplicaciones***
• Tipos y operaciones con vectores
• Producto escalar y vectorial
• Aplicaciones de vectores en geometría

Geometría del Espacio
• Representación de sólidos geométricos
• Volúmenes y áreas de superficies
• Aplicaciones prácticas

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Triángulos rectángulos

2. Teorema de Pitágoras

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

- Explicar la diferencia entre el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores.
- Determinar el producto escalar de dos vectores.
- Determinar el producto vectorial de dos vectores.
- Describir cómo se utilizan los productos de vectores en física.

Indicador de evaluación

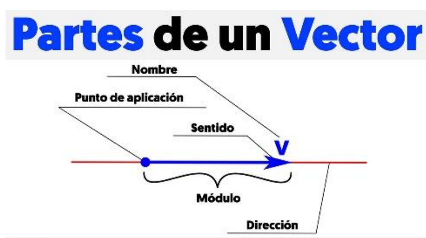
Realiza operaciones con vectores aplicándolo a la vida diaria.

Conocimientos previos:
1. Triangulos rectángulos
2. Teorema de pitágoras

VECTORES

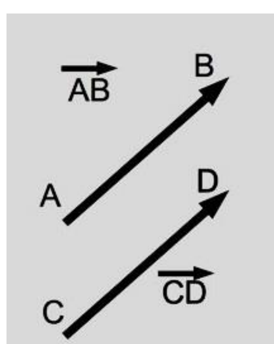
En física, se llama vector a un segmento de recta en el espacio que parte de un punto hacia otro, es decir, que tiene dirección y sentido. Los vectores en física tienen por función expresar las llamadas magnitudes vectoriales.

El término vector proviene del latín vector, vectoris, cuyo significado es 'el que conduce', o 'el que transporta'



Un vector es la representación gráfica de una magnitud física con forma de una flecha la cual posee una magnitud una dirección y un sentido. Los vectores se denotan por una sola letra en minúscula, ejemplo:

o con las letras de sus extremos:



Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Los vectores se representan gráficamente con una flecha. Asimismo, cuando deben ser expresados en una fórmula, se representan con una letra coronada por una flecha.

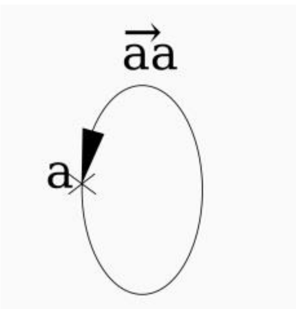
Los componentes de los vectores que definen sus características son los siguientes:

Módulo o magnitud: se refiere a la longitud o amplitud del vector o segmento de recta.

Dirección: se refiere a la inclinación que posee el vector con respecto a un eje horizontal imaginario, con el cual forma un ángulo.

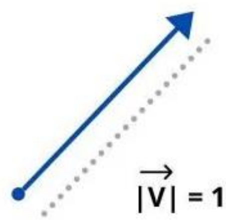
Sentido: se refiere a la orientación del vector, indicado por la cabeza de la flecha del vector.

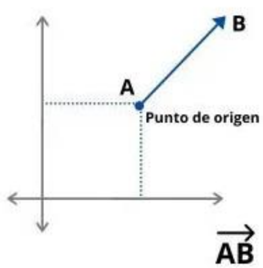
TIPOS DE VECTORES



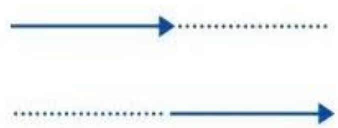
Vectores nulos: son aquellos donde origen y extremo coinciden y, por lo tanto, el módulo o magnitud es igual a 0. Por ejemplo:

Vectores unitarios: son aquellos cuyo módulo es igual a 1. Por ejemplo:



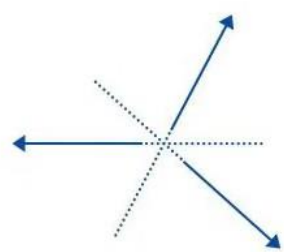


Vectores fijos: son aquellos que expresan un punto de origen además de un extremo, el cual está determinado en un punto fijo del espacio. Suelen usarse, por ejemplo, para expresar la fuerza aplicada sobre dicho punto. Para representarlos, se dice que el punto de origen es A y el extremo es B. Por ejemplo:



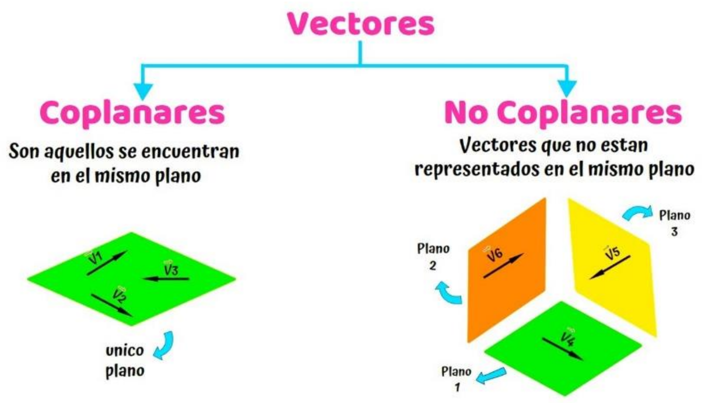
Vectores paralelos: están situados en rectas paralelas, pero poseen un mismo sentido o contrario. Por ejemplo:

Vectores opuestos: se caracterizan por tener la misma dirección y magnitud, pero su sentido es opuesto. Por ejemplo:



Vectores concurrentes o angulares: son aquellos cuyas líneas de acción pasan por el mismo punto, es decir, se intersecan. Por ejemplo:

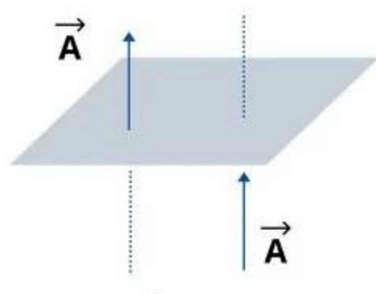
Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

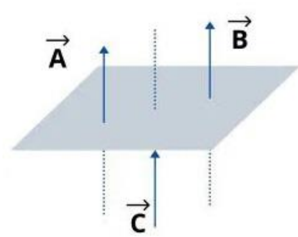


Vectores COPLANARES: La idea de coplanar alude a los puntos que se hallan en el mismo plano (es decir, se trata de puntos coplanares). Cuando el punto no pertenece a dicho plano, se lo considera no coplanario respecto a los demás.

VECTORES SIN PUNTO DE APLICACIÓN - LIBRES

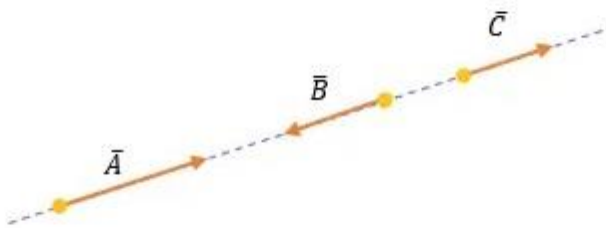
Vectores equipolentes o iguales: son aquellos vectores con igual módulo, dirección y sentido. Por ejemplo:



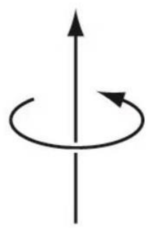


Vectores libres: son aquellos vectores cuyo punto de aplicación es indeterminado y, por lo tanto, libre. Se denomina vector libre al conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado. Por ejemplo:

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481



Vectores Colineales: Sus líneas de acción se encuentran sobre una misma recta.



Vectores axiales o pseudovectores: son los que están ligados a efectos de giro. La dirección señala el eje de rotación del segmento. Por ejemplo:

OPERACIONES CON VECTORES

SUMA.

Si se suman dos *magnitudes escalares*, basta con sumar sus valores numéricos. Por ejemplo 10 w más 20 w son 30 w de potencia. Por el contrario, para sumar dos *magnitudes vectoriales* el proceso es más complejo, pues debemos de tener en cuenta dirección y sentido. Conociendo las componentes cartesianas de los vectores a sumar, el vector resultante tendrá como componentes cartesianos la suma, eje a eje, de cada vector. Podemos sumar vectores de dos maneras: matemáticamente o gráficamente. Ejemplo: Supongamos que tenemos los vectores

$$\vec{A} = (4,3)$$
$$\vec{B} = (2,5)$$

Para conocer el vector suma $A + \vec{B}$ sólo tenemos que sumar, respectivamente, las componentes X y las componentes Y:

EJEMPLO:

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ \vec{A} = (& 4, & 3) \\ \vec{B} = (& 2, & 5) \end{array}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (4+2, 3+5) = (6,8)$$

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Suma de vectores colineales

Cuando la línea de acción de estos es la misma o paralelas, se ejecutan algebraicamente teniendo en consideración los sentidos.

EJEMPLO:

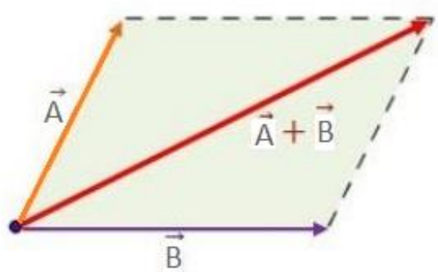
Calcular el módulo de la resultante cuyos módulos son de A=5u y B=3u.

Método del paralelogramo: El método del paralelogramo es un procedimiento gráfico sencillo que permite hallar la suma de dos vectores.

Primero se dibujan ambos vectores (a y $\vec{b}$) a escala, con el punto de aplicación común.

Segundo, se completa un paralelogramo, dibujando dos segmentos paralelos a ellos.

Tercero, el vector suma resultante (a $+\vec{b}$) será la diagonal del paralelogramo con origen común a los dos vectores originales.



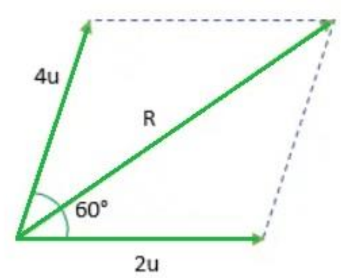
La fórmula del módulo del vector resultante es:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$$

EJEMPLO:

Calcular la resultante de los siguientes vectores:

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481



$$R = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2\,(4)(2)\,cos\,60°}$$

$$R = \sqrt{16 + 4 + 16(0.5)}$$

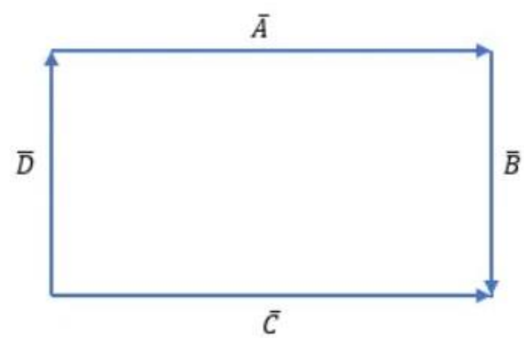
$$R = \sqrt{20+8} = \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \text{ X } 7}$$

$$R = 2\sqrt{7}u = 5{,}29 \text{ u}$$

Método del rectángulo: El método del rectángulo es muy similar al del paralelogramo, la diferencia radica es que los vectores hacia la izquierda y hacia abajo son negativos. Los que van hacia la derecha y hacia arriba son positivos.

EJEMPLO:

Se tienen los vectores A, B, C y D inscritos en un rectángulo cuyos lados miden 8 cm y 10 cm. Calcular el módulo del vector resultante.



Solución

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

R = 10 - 8 + 10 + 8

R = 20 cm

Te invito a reforzar el tema de suma de vectores y a adelantar tema con la resta viendo el siguiente video:

Te invito a practicar sumando vectores mediante el juego en el siguiente enlace:

https://www.cokitos.com/suma-de-vectores/play/

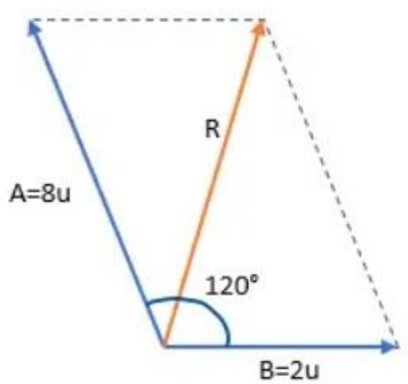
Ing. Carlos Fernando Ortega

T.P.25255239726 CND – COPNIA

EJERCICIO 1:

1. Se tienen tres vectores A, B y C colineales y paralelos, cuyos módulos son: 3u, 4u y 10u respectivamente. Calcular el módulo del vector resultante.

2. Dos vectores concurrentes forman 120° entre sí. Calcular el módulo del vector resultante, siendo A=8u; B=2u



RESTA DE VECTORES

Para la resta de vectores, se procede igual que en la suma de vectores, bien operando con los componentes cartesianos, o bien mediante el método del paralelogramo. Sabiendo los componentes cartesianos de los vectores, restaremos las componentes cartesianas del segundo vector de los del primero. Restar un vector es lo mismo que sumar la negativa del vector original. Esto es exactamente igual que la regla para sumar un número negativo a un número positivo.

Ejemplo: Sean los vectores del Vector:

$\vec{a} = (2, -3)$
$\vec{b} = (3, \;\; 4)$

Obtener la resta de vectores Vector $\vec{a}$ – Vector $\vec{b}$.

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ \vec{a} = (& 2, & -3) \\ \vec{b} = (& 3, & 4) \end{array}$$

$\vec{a} - \vec{b} = (2 - 3\,, -3 - 4) =$
$\vec{a} - \vec{b} = (-1, -7)$

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Te invito a observar el siguiente ejemplo de resta mediante juegos:

https://www.educaplus.org/game/resta-de-vectores

EJERCICIO2:

Dados los siguientes vectores:
$\vec{u} = (-2{,}5) \quad \vec{v} = (3,-1)$
Calcule: $\vec{u} - \vec{v} =$

Dados los siguientes vectores:
$\vec{u} = (-3{,}4) \quad \vec{v} = (4,-1)$
Calcule: $\vec{u} - \vec{v} =$

Dados los siguientes vectores:
$\vec{u} = (4,-5) \quad \vec{v} = (3,-1)$
Calcule: $\vec{u} - \vec{v} =$

MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Existen varios modos para multiplicar vectores, aunque dos son quizás los más utilizados, por un lado, la operación al aplicar el Producto Escalar y por otro, el Producto Vectorial.

La multiplicación de dos vectores *A* y *B* se realiza de dos formas:

- Como producto escalar, cuyo resultado es un número:

  $A \cdot B = C$; Donde $C \in R$.

- Como producto vectorial, cuyo resultado es otro vector.

  $A \times B = C$

1. Producto escalar

Sea $A = (Ax, Ay, Az)$ y $B = (Bx, By, Bz)$, el producto escalar (denominado también producto punto o producto interno) de dos vectores se define como:

$A \cdot B = AxBx + AyBy + AzBz$

Ahora, otra forma de expresar el producto escalar es:

$A \cdot B = |A|\,|B| \cos\theta$

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Donde |*A*| y |*B*| son los módulos de *A* y *B*, y θ es el ángulo entre ambos vectores.

El producto escalar de dos vectores da como resultado un número real.

Ejemplo 1: Determine el producto escalar de *A* = (2, 4, 6) y *B* = (-2, 3, 8).

Vemos que para el vector *A* , 2 es la componente "x", 4 es "y" y 6 es "z".

Para el vector *B*, -2 es la componente "x", 3 "y" y 8 es "z".

El producto escalar será:

$A \cdot B = Ax.Bx + AyBy + AzBz = (2)(-2) + (4)(3) + (6)(8) = -4 + 12 + 48 = 56$

Ejemplo 2: Determine el producto escalar de *A* = (5, 7) y *B* = (- 1, -3), considerando que el ángulo entre ambos es θ = 60 º.

Vemos que para el vector *A*, 5 es la componente "x" y 7 es "y". Para el vector *B*, -1 es la componente "x" y – 3 es "y". El producto escalar será:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

- Cálculo del módulo de ***A***:

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{[\,(A_x)^2 + (A_y)^2\,]} = \sqrt{[\,(5)^2 + (7)^2\,]} = \sqrt{(25 + 49)} = \sqrt{74}$$

- Cálculo del módulo de ***B***:

$$|\boldsymbol{B}| = \sqrt{[\,(B_x)^2 + (B_y)^2\,]} = \sqrt{[\,(-1)^2 + (-3)^2\,]} = \sqrt{(1 + 9)} = \sqrt{10}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sqrt{74}\,\sqrt{10}\cos 60^{\circ} = (\sqrt{74}\,\sqrt{10})/2 = \sqrt{740}\,/\,2 = 13{,}60$$

Te invito a observar el siguiente video sobre producto escalar:

Te invito a observar los siguientes ejercicios:

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/vectores/ejercicios-del-producto-escalar.html#tema_ejercicio-1

2. Producto vectorial

Sea *A* = (Ax, Ay, Az) y *B* = (Bx, By, Bz), , el producto vectorial (denominado también producto cruz) de dos vectores se define como:

$A \times B = (AyBz - AzBy)\,\hat{\imath} + (AxBz - AzBx)\,\hat{\jmath} + (AxBy - AyBX)\,k$

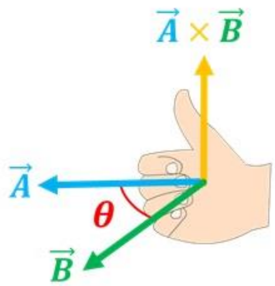
Ahora, si multiplicamos las magnitudes de *A* y *B* y las multiplicamos por el seno del ángulo que forman ambos vectores (< 180 º), la magnitud del producto vectorial es:

$A \times B = |A|\,|B| \sin\theta$

Donde $|A|$ y $|B|$ son los módulos de *A* y *B*, y θ es el ángulo entre ambos vectores.

La dirección del vector del producto vectorial se determina por la regla de la mano derecha.

Regla de la mano derecha



Si colocamos la mano derecha de modo que los dedos señalen en dirección de rotación de Donde $|A|$ y $|B|$ son los módulos de *A* hacia *B*, por el camino más corto, el dedo pulgar estirado señala la dirección y sentido del vector producto vectorial *A* × *B*.

Ejemplo: Determine el producto vectorial de *A* = (6, 8, 10) y *B* = (-2, 3, 8):

Vemos que para el vector *A* , 6 es la componente "x", 8 es "y" y 10 es "z".

Ahora, para el vector *B*, -2 es la componente "x", 3 "y" y 8 es "z".

El producto vectorial será:

$A \times B = (8 \cdot 8 - 10 \cdot 3)\,\hat{\imath} + [6 \cdot 8 - 10 \cdot (-2)]\,\hat{\jmath} + [6 \cdot 3 - 8 \cdot (-2)]\,k =$

$= (64 - 30)\,\hat{\imath} + (48 + 120)\,\hat{\jmath} + (18 + 16)\,k =$

$= 34\,\hat{\imath} + 68\,\hat{\jmath} + 34\,k$

Determinante del producto vectorial

El producto vectorial se representa de forma compacta por medio de un determinante que para el caso de dimensión 3×3 es:

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

Ejemplo: Determine el producto vectorial de *A* = (1, -2, 1) y *B* = (-1, 3, 1):

Vemos que para el vector *A* , 1 es la componente "x", -2 es "y" y 1 es "z".

Ahora, para el vector *B*, -1 es la componente "x", 3 "y" y 1 es "z".

El producto vectorial será:

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

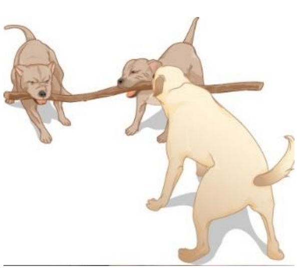
$$= [(-2)\cdot 1 - 1\cdot 3)]\,\hat{\imath} + [1\cdot 1 - 1\cdot(-1)]\,\hat{\jmath} + [1\cdot 3 - (-2)\cdot(-1)]\,k =$$

$$= (-2 - 3)\,\hat{\imath} + (1 + 1)\,\hat{\jmath} + (3 - 2)\,k =$$

$$= -5\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + k$$

Te invito a observar el siguiente video sobre producto vectorial:

EJERCICIO3:



1. Tres perros halan de un palo en diferentes direcciones, como se muestra en la Figura, . El primer perro hala con fuerza F1=(10,0i-20,4j+2,0k)N, el segundo perro hala con fuerza F2=(−15,0i−6,2k)N, y el tercer perro hala con fuerza F3=(5,0i+12,5j)N. ¿Cuál es el ángulo entre las fuerzas F1 y F2?

2. Te invito a desarrollar el siguiente ejercicio en el computador o tu celular y mostrar los resultados al profesor.

https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/matrices-y-vectores

3. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Producto punto:

El **producto escalar** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es un número definido por la ecuación

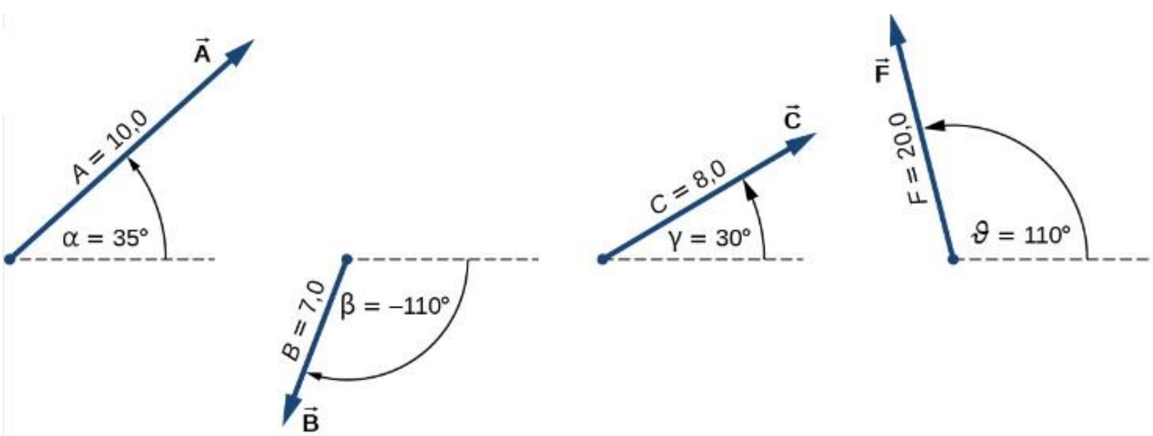
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre los vectores. El producto escalar también se denomina **producto punto** por la notación de punto que lo indica.

En la definición del producto punto, la dirección del ángulo φ no importa, y φ se puede medir desde cualquiera de los dos vectores hacia el otro porque $\cos \varphi = \cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$. El producto punto es un número negativo cuando $90^\circ < \varphi \le 180^\circ$ y es un número positivo cuando $0^\circ \le \varphi < 90^\circ$. Además, el producto punto de dos vectores paralelos es $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB \cos 0^\circ = AB$, y el producto punto de dos vectores antiparalelos es $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB \cos 180^\circ = -AB$. El producto escalar de dos *vectores ortogonales* es igual a cero: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB \cos 90^\circ = 0$. El producto escalar de un vector consigo mismo es el cuadrado de su magnitud:

$$\vec{\mathbf{A}}^2 \equiv \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = AA \cos 0^\circ = A^2.$$

EJEMPLO:



A partir de la Figura anterior, la magnitud de los vectores A y F son A = 10,0 y F = 20,0. El ángulo θ entre ellos, es la diferencia: θ=φ−α=110°−35°=75°. Sustituyendo estos valores en la Ecuación obtenemos el producto escalar.

Solución

Un cálculo sencillo nos da A . F=AFcosθ=(10,0)(20,0)cos75°=51,76.

EJERCICIO4:

Para los vectores dados en la Figura, halle el producto escalar A . B y F . C.

APLICACIÓN DE VECTORES A LA GEOMETRÍA

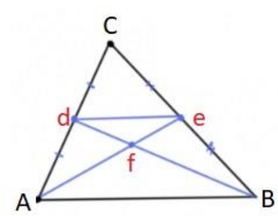
Los vectores se aplican en la geometría de diversas formas, como para representar puntos, líneas, planos, y para resolver problemas:

- Representación de puntos: La forma vectorial permite representar un punto en el espacio como un vector. Por ejemplo, un punto P se representa como el vector →OP, que es la línea vectorial que conecta el origen O con el punto P.
- Representación de líneas y planos: La forma vectorial se usa para representar líneas y planos en un espacio tridimensional.
- Solución de problemas: Los vectores se pueden usar para resolver problemas en geometría analítica, como el teorema de Ceva o el vector bisectriz en un triángulo.
- Representación de fuerzas: En física, los vectores se usan en el plano cartesiano para representar la combinación de fuerzas. Los vectores permiten representar fuerzas contrapuestas porque señalan la dirección.

Geométricamente, un vector se representa como un segmento de línea dirigido, es decir, una flecha. La punta de la flecha indica la dirección del vector y la longitud de la flecha describe su magnitud.

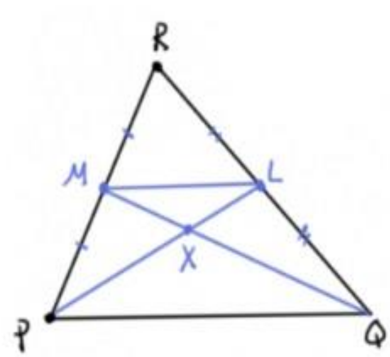
EJEMPLO1:

Problema. En el triángulo ABC se toman puntos D, E, F sobre los segmentos BC, CA, AB tales que $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{4}$. Muestra que ABC y DEF tienen el mismo gravicentro.



Sugerencia pre-solución. Encuentra una fórmula en términos vectoriales para el gravicentro de un triángulo ABC.

Solución. Tomemos un triángulo PQR y pensemos a sus vértices como vectores. Afirmamos que su gravicentro X es el punto correspondiente a $\frac{P+Q+R}{3}$ Demostraremos esto.



Razón del gravicentro en la mediana

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Primero haremos un argumento de geometría sintética. El gravicentro es por definición el punto de intersección de las medianas de un triángulo. Si L es el punto medio de QR y M es el punto medio de RP, entonces X es el punto de intersección de PL y QM. Tenemos que

$$\frac{RL}{LQ} = 1 = \frac{RM}{MP},$$

así que por el teorema de Tales se tiene que la recta por L y M es paralela al lado PQ, y $\frac{LM}{PQ} = \frac{1}{2}$. Esto muestra que los triángulos XLM y XPQ son semejantes en razón 1 a 2. Por lo tanto, $\frac{LX}{XP} = \frac{1}{2}$.

Ahora hagamos el argumento vectorial, pensando a los puntos como vectores. El punto L está a la mitad de QR, así que por la proposición de la razón,

$$L = \frac{Q+R}{2}.$$

El punto X cumple $\frac{LX}{XP} = \frac{1}{2}$, así que de nuevo por la proposición de la razón.

$$\begin{aligned} X &= \frac{2L+P}{2+1} \\ &= \frac{Q+R+P}{3} \\ &= \frac{P+Q+R}{3}. \end{aligned}$$

Esto es el resultado auxiliar que queríamos mostrar. Regresemos al problema.

De acuerdo al resultado auxiliar, el gravicentro de ABC es

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

$$G := \frac{A+B+C}{3}.$$

Usando una vez más la proposición de la razón, los puntos D, E y F los podemos calcular como sigue:

$$\begin{aligned} D &= \frac{4B+C}{4+1} = \frac{4B+C}{5} \\ E &= \frac{4C+A}{4+1} = \frac{4C+A}{5} \\ F &= \frac{4A+B}{4+1} = \frac{4A+B}{5}. \end{aligned}$$

De esta forma, el gravicentro G' de DEF lo podemos encontrar como sigue:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{D+E+F}{3} \\ &= \frac{\frac{4B+C}{5} + \frac{4C+A}{5} + \frac{4A+B}{5}}{3} \\ &= \frac{A+B+C}{3} \\ &= G. \end{aligned}$$

Esto termina la solución del problema.

EJEMPLO2:

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Problema. En el paralelogramo $ABCD$ el punto F es el punto medio de CD. Muestra que el segmento AF corta a la diagonal BD en un punto E tal que $\frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}$.

Sugerencia pre-solución. Hay varias formas de hacer las cuentas en este problema, pero el uso de una notación adecuada te hará simplificar muchas operaciones.

Solución. Pensemos a los puntos de la figura como vectores. Coloquemos al punto A en el origen. El punto C está dado por $B+D$, de modo que

$$F := \frac{C+D}{2} = \frac{B+2D}{2}.$$

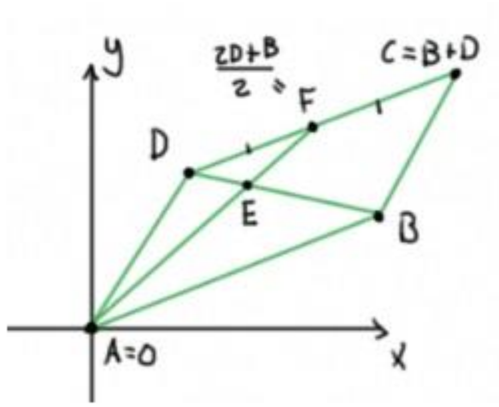


Figura auxiliar para problema de paralelogramo

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Para encontrar al punto E, notemos que está en las rectas AF y BD. De esta forma, deben existir reales r y s tales que

$$E = rF$$

y

$$E = sB + (1-s)D.$$

Expresando F en términos de B y D en la primer ecuación, tenemos que

$$E = \frac{rB + 2rD}{2} = \frac{rB}{2} + rD.$$

De ambas expresiones para E, concluimos que

$$\begin{aligned} s &= \frac{r}{2} \\ 1 - s &= r. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución $r = \frac{2}{3}$, $s = \frac{1}{3}$, y por lo tanto $E = \frac{B+2D}{3}$. De aquí se obtiene $\frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}$, o bien $\frac{DE}{DB} = \frac{DE}{DE+EB} = \frac{1}{3}$, como queríamos mostrar.

Producto punto, norma y ángulos

Para dos vectores P=(x,y) y Q=(w,z) definimos su *producto punto* como la cantidad P·Q=xw+yz. El productos puntos es:

- Conmutativo: P·Q=Q·P
- Abre sumas: P·(Q+R)=P·Q+P·R
- Saca escalares: (rP)·Q=r(P·Q).

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

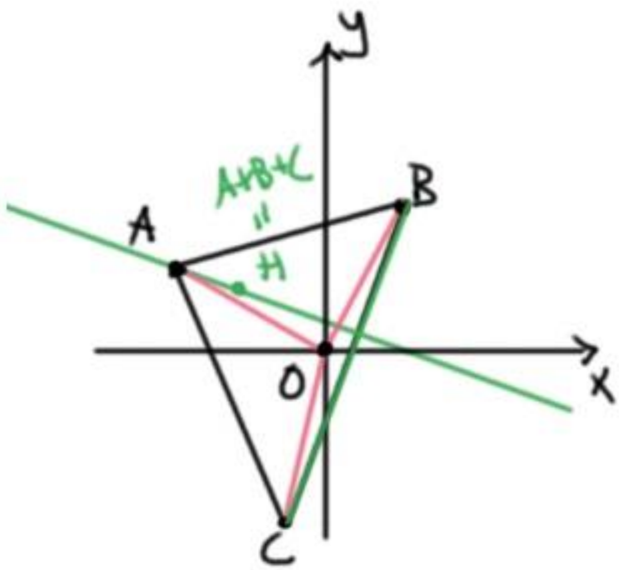
Problema. Sea ABC un triángulo con sus vértices pensados como vectores. Sean H y O su ortocentro y circuncentro respectivamente. Supongamos que el circuncentro O está en el origen. Muestra que $H = A + B + C$.

Sugerencia pre-solución. Trabaja hacia atrás. Define al punto $A + B + C$ y ve que las rectas que unen a los vértices con este punto en efecto son alturas. Para calcular los ángulos, usa el producto punto y sus propiedades.

Solución. Como el circuncentro equidista de A, B y C, tenemos que

$$\|A\| = \|B\| = \|C\|.$$

Tomemos el punto $H' = A + B + C$.



Esto muestra que la recta AH' es la altura al lado BC. De manera análoga, BH' y CH' son las alturas a los lados CA y AB respectivamente. Por lo tanto, H' es el ortocentro, así que $H = A + B + C$.

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

Ing. Carlos Fernando Ortega
T.P.25255239726 CND – COPNIA

Calculemos el ángulo entre las rectas BC y AH', haciendo su producto punto:

$$\begin{aligned} BC \cdot AH' &= (C - B) \cdot (H' - A) \\ &= (C - B) \cdot (C + B) \\ &= C \cdot C + C \cdot B – B \cdot C – B \cdot B \\ &= \|C\|^2 – \|B\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observa que estamos usando la linealidad y conmutatividad del producto punto. Al final usamos que A y C tienen la misma norma.

Esto muestra que la recta AH' es la altura al lado BC. De manera análoga, BH' y CH' son las alturas a los lados CA y AB respectivamente. Por lo tanto, H' es el ortocentro, así que $H = A + B + C$.

fortega2002b@gmail.com- Cel.3175763481

SABER - SER

HETEROEVALUACIÓN: La valoración del trabajo desarrollado en la presente guía se realizará de la siguiente forma:

• Saber Hacer (50%): a. Elaboración y entrega de las actividades propuestas.

a. Ejercicios de Prueba.

• Saber (25%): a. Prueba Bimestral

• Ser - Convivir (25%): a. Normas de Convivencia.

b. Responsabilidad y Cumplimiento en la entrega de trabajos.

c. Seguimiento a las instrucciones dadas por el docente.

d. Autoevaluación y Coevaluación.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACION: Periodo 4

Transcribir a hojas de block cuadriculado las siguientes tablas, marcar con una X en la casilla de la valoración correspondiente a los siguientes criterios y luego totalizar cada columna. Se debe realizar con la máxima sinceridad:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSe8K6emBxx7juVipbyPzTOGq_10Rg7a2XDDfxaaipio4DKZTA/viewform?usp=pp_url